


А. В. Погорелов

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ
ОБОЛОЧКИ
ПРИ
ЗАКРИТИЧЕСКИХ
ДЕФОРМАЦИЯХ

*II. Внешнее
давление*

*Издательство
Харьковского университета*



А. В. ПОГОРЕЛОВ

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ
ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ
ДЕФОРМАЦИЯХ
II. ВНЕШНЕЕ ДАВЛЕНИЕ

Сканировал и обрабатывал
Лукин А.О.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ
А. М. ГОРЬКОГО

Харьков

1962

В работе рассматривается упругое состояние цилиндрической оболочки под внешним давлением при закритических деформациях. В частности, определяется нижнее критическое давление.

Изложение элементарно и рассчитано на широкий круг читателей, владеющих элементами теории оболочек и дифференциальной геометрии.

Работа может быть полезна для инженеров-конструкторов, студентов-механиков, научных работников в области теории оболочек.

Ответственный редактор
проф. Я. П. Бланк.

APPROVED

Настоящая работа является продолжением предыдущей публикации автора под тем же названием, посвященной исследованию закритических деформаций цилиндрических оболочек при осевом сжатии*. Здесь мы рассматриваем закритические состояния цилиндрических оболочек, находящихся под внешним давлением.

§ 1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА, МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

По определению закритическими мы называем такие деформации, при которых форма поверхности оболочки значительно отличается от первоначальной формы. Иными словами, прогибы оболочки сравнимы с ее геометрическими размерами. Исследование упругих закритических состояний оболочек находится вне области применимости линейной теории. Вместе с тем исследование таких состояний представляет теоретический и практический интерес.

Дело в том, что разрушение тонкой оболочки под внешним давлением связано прежде всего с закритическими деформациями в результате потери устойчивости основной, цилиндрической формы. Поэтому естественно при проектировании оболочек принять в качестве расчетной такую нагрузку, которая не приводит к потере устойчивости. Однако это простое и естественное решение вопроса встречает серьезные затруднения, так как величина критической нагрузки q_e , при которой происходит потеря устойчивости, подвержена сильному и довольно неопределенному влиянию различных факторов, в особенности начальной погиби. Объясняется это не-

А. В. Погорелов. Цилиндрические оболочки при закритических деформациях: I. Осевое сжатие. Изд-во Харьковского университета, 1961.

устойчивостью состояния равновесия оболочки под действием критической нагрузки q_e .

Воспринимаемая оболочкой нагрузка при переходе к закритическим деформациям в результате потери устойчивости снижается, достигает некоторого минимального значения q_i , после чего начинает возрастать. Величина q_i называется нижней критической нагрузкой.

В отличие от q_e , которую обычно называют верхней критической нагрузкой, нижняя критическая нагрузка q_i более стабильна. Если взять нагрузку q_i в качестве расчетной, то переход оболочки к закритическим деформациям будет совершенно исключен. Поэтому определение величины q_i представляет безусловный практический интерес. Нижняя критическая нагрузка подвергалась теоретическим и экспериментальным исследованиям многими авторами*.

Настоящая работа также в значительной степени посвящена исследованию нижней критической нагрузки для цилиндрической оболочки, шарнирно опертой по краям под внешним давлением. Основу применяемого метода исследования составляет способ приближения формы оболочки при закритическом упругом равновесии. Прежде всего мы исходим из предположения о том, что закритическая деформация является в основном геометрическим изгибанием. Это предположение естественно, так как внутренние деформации срединной поверхности оболочки, как упругие деформации, малы. Далее мы полагаем, что закритическая деформация является развитием формы волнообразования на поверхности оболочки в момент потери устойчивости. Это предположение, как нам кажется, столь же естественно.

Указанных двух соображений по существу достаточно, для того чтобы воспроизвести форму оболочки при закритической деформации посредством изометричной цилиндру поверхности Z , с точностью до некоторой функции одного переменного. Эту функцию мы определяем из энергетических соображений, именно из условия минимума энергии упругой деформации оболочки в форму Z при фиксированной работе A , производимой внешней нагрузкой.

См. А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1956.

Поверхность Z , изометричная исходной цилиндрической поверхности, состоит из $2n$ общих цилиндрических областей Z_k с образующими, перпендикулярными оси поверхности (рис. 1). Смежные области Z_k и Z_{k+1} разделены ребрами γ_k . Определяя энергию упругой деформации оболочки в форму Z , мы разбиваем ее на две части— U_γ и U_Z . U_γ — это энергия сильного местного изгиба вдоль ребер γ_k , а U_Z — энергия изгиба по основной поверхности оболочки. Энергия U_Z определяется обычным способом, а энергия U_γ — с помощью формулы, полученной в предыдущей работе автора*.

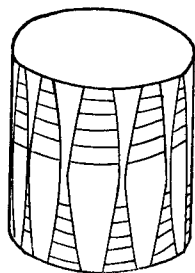


Рис. 1.

Минимизируя энергию упругой деформации при фиксированной работе A , производимой внешней нагрузкой, мы находим форму оболочки Z и энергию U в зависимости от параметра λ , характеризующего общую деформацию. Воспринимаемая оболочкой нагрузка q при заданной деформации λ определяется из условия равновесия $dU(\lambda) = dA(q, \lambda)$.

Переходим к изложению результатов. Прежде всего разобьем все цилиндрические оболочки на три класса в зависимости от геометрических размеров и упругих характеристик материала. Это осуществляется при помощи двух условий.

Условие А:

$$\frac{R\delta}{L^2} \ll 1$$

(δ — толщина оболочки, R — радиус, а L — длина).

Условие В:

$$0,4 E \frac{\delta}{R} \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{-1/2} < \sigma_B,$$

где E — модуль упругости материала оболочки, а σ_B — временное сопротивление. Предполагается, что материал оболочки имеет классическую диаграмму состоя-

* К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии, Изд-во Харьковского университета, 1960.

ния, то есть σ_c , является одновременно пределом упругости.

Условие A мы можем уточнить. Именно, можно считать, что условие A выполнено, если

$$\frac{R\delta}{L^2} < 0,016.$$

Оболочки мы относим к первому классу, если для них не выполняется условие A . Такие оболочки в работе не рассматриваются.

Для второго класса оболочек, которые мы называем относительно толстыми, выполняется условие A , но не выполняется условие B . Переход к закритическим деформациям у таких оболочек неизбежно связан с появлением пластических деформаций в материале. Качественное рассмотрение вопроса о закритических деформациях толстых оболочек приводит к заключению, что у них нижняя критическая нагрузка q_i близка к верхней q_e .

Оболочки мы называем сравнительно тонкими, если они удовлетворяют обоим условиям A и B . Для таких оболочек закритические деформации, отвечающие состояниям равновесия, являются упругими. Исследованию их и посвящена в основном работа.

Показывается, что состояния равновесия тонкой оболочки на первом этапе закритической деформации, который начинается потерей устойчивости цилиндрической формы, являются неустойчивыми. С увеличением деформации воспринимаемая оболочкой нагрузка q падает. При достаточном сближении ребер на поверхности оболочки в закритическом состоянии воспринимаемая оболочкой нагрузка растет. Начинается второй этап закритической деформации, в котором состояния равновесия являются устойчивыми.

Если внешнее давление q на оболочку характеризовать безразмерной величиной $\bar{q} = qR^2/E\delta^2$, то для величины \bar{q}_i^0 наименьшей воспринимаемой оболочкой нагрузки, то есть нижней критической нагрузки, получается формула

$$\bar{q}_i^0 = \bar{q}_e^0 \left(2 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2} + 1,5 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2} \right),$$

где

$$\bar{q}_e^0 = 0,86 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2}$$

В работе рассматривается также вопрос о величине нижнего критического давления при наличии малого осевого сжатия p . В этой части метод исследования остается прежним, а результат получается следующий.

Если осевое сжатие \bar{p} характеризовать безразмерной величиной $\bar{p} = pR/E\delta$, то для величины нижнего критического давления при наличии осевого сжатия в случае тонких оболочек, определяемых условиями A и B , получается формула

$$\bar{q}_i = \bar{q}_i^0 - 7,75 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2} \bar{p},$$

где \bar{q}_i^0 — безразмерное критическое давление при отсутствии осевого сжатия. В частности, для нижнего критического давления при всестороннем сжатии ($\bar{P} = \bar{q}/2$)

$$\bar{q}_i = \frac{\bar{q}_i^0}{1 + 3,9 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2}}.$$

В дополнении устраняется неточность, допущенная в первой части работы, посвященной сжатым цилиндрическим оболочкам.

§ 2. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Предлагаемое исследование за критического упругого состояния цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего давления, основано прежде всего на предположении о том, что характер выпучивания оболочки при такой деформации предопределяется формой волнообразования на ее поверхности в момент потери устойчивости и является развитием этой формы. В связи с этим представляется естественным начать исследование

с выяснения возможных форм волнообразования, возникающих в результате потери устойчивости основной формы. Решению этого важного для дальнейшего изложения вопроса и будет посвящен настоящий параграф.

1. Состояние упругого равновесия, возникающее при потере устойчивости основной формы

Мы будем рассматривать круговую цилиндрическую оболочку радиуса R , длины L и толщины δ , находящуюся под действием постоянного внешнего давления, равного q на единицу площади поверхности. Закрепление оболочки вдоль края либо шарнирное опирание, либо жесткое защемление (рис. 2).

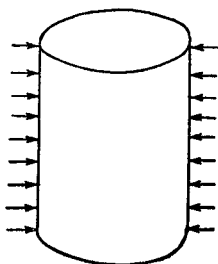


Рис. 2.

При сравнительно небольшом давлении q оболочка испытывает малую осесимметричную деформацию, которая сопровождается появлением напряжений.

$$\sigma = \frac{Rq}{\delta}$$

в радиальных сечениях. При увеличении внешнего давления q наступает момент, когда указанная осесимметричная упругая деформация не является единственно возможной формой. И наряду с ней не исключаются другие формы, уже не обладающие осевой симметрией.

Введем на поверхности оболочки систему криволинейных координат x, y , приняв за линии x образующие цилиндра, а за линии y — сечения, перпендикулярные оси. В качестве координат x, y возьмем расстояния вдоль линий x и y соответственно. Начало координат поместим на краю оболочки.

Пусть $w(x, y)$ — прогиб оболочки в точке (x, y) поверхности, смещение по нормали в результате деформации. Как показывается в линейной теории оболочек*, прогиб $w(x, y)$ оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного внешнего давления q , удов-

* См., например, А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1956.

летворяет дифференциальному уравнению в частных производных.

$$\frac{D}{\delta} \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\sigma R}{\delta} \Delta \Delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (*)$$

где

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1 - \mu^2)}$$

— жесткость оболочки на изгиб, E — модуль упругости материала оболочки, μ — коэффициент поперечного сжатия, σ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Задача об определении форм упругого равновесия оболочки, возникающих в результате потери устойчивости основной формы, сводится к определению ненулевых решений этого уравнения при краевых условиях, соответствующих способу закрепления оболочки.

Мы рассмотрим подробно случай шарнирного опирания оболочки. В этом случае краевые условия для решения $w(x, y)$ будут

$$w(0, y) = 0, \quad w(L, 0) = 0, \quad (**)$$

и задача сводится к определению решения уравнения (*) при краевых условиях (**). Пусть $w(x, y)$ — такое решение.

Предполагая достаточную регулярность решения $w(x, y)$, разложим его в двойной тригонометрический ряд

$$w = \sum_{m, n} \left(a_{mn} \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R} + b_{mn} \sin \frac{\pi m x}{L} \cos \frac{n y}{R} \right).$$

В этом разложении по переменной x мы ограничиваемся только синусами, чтобы удовлетворить краевым условиям (**).

Подставляя ряд $w(x, y)$ в уравнение (*), получим

$$w = \sum_{m, n} \varphi_{mn}(q) \left(a_{mn} \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R} + b_{mn} \sin \frac{\pi m x}{L} \cos \frac{n y}{R} \right) = 0,$$

$$\varphi_{mn}(q) = \frac{D}{\delta} \left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{E}{R^2} \left(\frac{\pi m}{L} \right)^4 - \\ - \frac{qR}{\delta} \left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right) \frac{n^2}{R^2}.$$

Формальные преобразования левой части равенства, связанные с приданием ей такой формы, законны благодаря равномерной сходимости ряда ω вместе с его производными. Так как ряд стоящий в левой части равенства равен нулю тождественно, а среди коэффициентов a_{mn} , b_{mn} заведомо есть хотя бы один отличный от нуля ($\omega(x, y) \neq 0$), то

$$\varphi_{mn}(q) = 0$$

по крайней мере для одной системы индексов m, n . Обратное, если для некоторых m и n $\varphi_{mn}(q) = 0$, то уравнение (*) при краевом условии (**) имеет нетривиальное решение. Например,

$$\omega = \sin \frac{\pi mx}{L} \sin \frac{ny}{R}.$$

Итак, для того чтобы уравнение (*) при краевых условиях (**) имело нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы существовали целые m и n , для которых

$$\varphi_{mn}(q) = 0.$$

2. Верхняя критическая нагрузка

Для того чтобы при данном внешнем давлении q было возможно состояние равновесия оболочки, отличное от основной формы, надо, чтобы уравнение

$$\varphi_{mn}(q) = 0$$

относительно m и n допускало хотя бы одно целочисленное решение. Не для всякого значения q это возможно, но существует бесчисленное множество таких q , для которых уравнение допускает решение. Наименьшее значение q , обладающее этим свойством, называется верхней критической нагрузкой. Будем обозначать ее q_k .

При нагрузке $q < q_k$ форма упругого равновесия оболочки определяется однозначно и соответствует осесим-

метрической деформации. Единственность этой формы имеет своим следствием ее устойчивость. Наименьшее значение q , при котором появляется неоднозначность состояния равновесия, есть q_k . Поэтому естественно предположить, что переход в закритическое упругое состояние начинается с форм волнообразования на поверхности оболочки, отвечающих нагрузке q_k . Рассмотрим эти формы.

Для удобства исследования уравнения $\varphi_{mn}(q)$ обычно вводят вместо целочисленных переменных m и n параметры

$$\xi = \frac{\pi m R}{L n} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{n^2 \delta}{R},$$

а нагрузку q характеризуют безразмерной величиной

$$\bar{q} = \frac{q R^2}{E \delta^2}.$$

Если в уравнение $\varphi_{mn}(q) = 0$ ввести эти новые переменные и разрешить его относительно \bar{q} , то оно принимает вид

$$\bar{q} = \frac{1}{12(1-\mu^2)} (1 + \xi^2)^2 \eta + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2 \eta}.$$

Минимальному значению q отвечает, очевидно, минимальное значение \bar{q} .

Выясним, чему равно минимальное значение \bar{q} , а также при каких значениях параметров m и n оно получается.

При фиксированном n , а следовательно, и η , которое зависит только от n , \bar{q} будет функцией переменного ξ и притом, как нетрудно убедиться, монотонно возрастающей. Отсюда следует, что минимальному значению \bar{q} соответствует значение параметра $m = 1$.

Выясним теперь, каково должно быть значение параметра n . Так как $m = 1$ и, следовательно,

$$\xi = \frac{\pi R}{L n},$$

то

$$\eta = \frac{\pi^2}{\xi^2} \epsilon, \quad \epsilon = \frac{R \delta}{L^2}.$$

Отсюда

$$\bar{q} = \frac{\pi^2 \varepsilon}{12(1-\mu^2)} \frac{(1+\xi^2)^2}{\xi^2} + \frac{1}{\pi^2 \varepsilon} \frac{\xi^6}{(1+\xi^2)^2}.$$

Очевидно \bar{q} достигает абсолютного минимума при некотором значении ξ . Оценим величину этого ξ . Для этого вычислим производную \bar{q} по ξ^2 . Имеем:

$$\frac{d\bar{q}}{d(\xi^2)} = \frac{\pi^2 \varepsilon}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{\pi^2 \xi} (3\xi^2 - 2\alpha^3),$$

где для краткости обозначено

$$\frac{\xi^2}{1+\xi^2} = \alpha.$$

Для тонких, но не слишком коротких оболочек параметр ε мал. А при малом ε и

$$\alpha > \frac{\pi \sqrt{\varepsilon}}{(12(1-\mu^2))^{\frac{1}{4}}}$$

величина

$$\frac{d\bar{q}}{d(\xi^2)} > 0,$$

в чем легко убедиться непосредственно. Отсюда следует, что минимум \bar{q} достигается при малом значении α , а следовательно, малом ξ . Это позволяет при определении $\min \bar{q}$ принять для \bar{q} упрощенное выражение. Именно, можно считать, что

$$\bar{q} = \frac{\pi^2 \varepsilon}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{1}{\xi^2} + \frac{\xi^6}{\pi^2 \varepsilon}.$$

Нетрудно найти минимум этого выражения. Он равен

$$\bar{q}_k = 0,92 \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}} \quad (\mu = 0,3),$$

и достигается для

$$\xi^4 = \left(\frac{\pi^4 \varepsilon^2}{36(1-\mu^2)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

то есть для значения параметра n , удовлетворяющего условию

$$\sqrt{\frac{R\bar{\delta}}{L^2}} = 7,5 \left(\frac{R}{Ln} \right)^2. \quad (***)$$

Замечание. Так как n может иметь только целочисленные значения, то $\min \bar{q}$, вообще говоря, несколько больше полученного нами \bar{q}_k , и значение n , для которого \bar{q} достигает минимума, не удовлетворяет полученному соотношению (***)). В дальнейшем для простоты мы будем, однако, предполагать, что $\min \bar{q}$ достигается при целом n , и, следовательно, это n удовлетворяет (***)).

Соотношение (***) для n определяет его однозначно. Отсюда следует, что функция $n(x, y)$, соответствующая упругому состоянию оболочки в не основной форме, при $q = q_k$ имеет вполне определенный вид. Именно:

$$\omega = a_n \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + b_n \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{ny}{R},$$

где параметр n определяется указанным выше соотношением. Смещением начала отсчета y вдоль края оболочки, то есть преобразованием $y \sim y + \text{const}$ можно придать функции ω совсем простой вид:

$$\omega = a \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{ny}{K}.$$

Итак, *наименьшее значение внешнего давления, вызывающего потерю устойчивости,*

$$q = \bar{q}_k \left(\frac{\delta}{R} \right)^2, \quad \bar{q} = 0,92 \sqrt{\frac{R\bar{\delta}}{L^2}}.$$

В соответствующих координатах x, y прогиб ω , связанный с переходом от основной формы равновесия, с точностью до постоянного множителя равен

$$\sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}.$$

Параметр n определяется соотношением

$$\sqrt{\frac{R\bar{\delta}}{L^2}} = 7,5 \left(\frac{R}{Ln} \right)^2.$$

3. Некоторые экспериментальные данные

Вопрос о величине верхней критической нагрузки и форме волнообразования в момент потери устойчивости цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего давления, подвергался теоретическому и экспериментальному исследованию*. Приведем некоторые экспериментальные данные.

Прежде всего экспериментально установлено, что переход к закритическим деформациям в результате потери устойчивости цилиндрической формы происходит мгновенно, с хлопком. При этом на поверхности оболочки появляются глубокие выпучины внутрь оболочки, разделенные сравнительно узкими складками, отклоняющимися наружу (рис. 3).

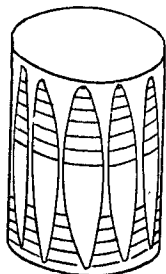


Рис. 3.

Величина верхнего критического давления q_k в эксперименте получается несколько меньше и еще меньше при наличии у испытуемых образцов значительной начальной погиби (отклонения от цилиндрической формы).

Следует заметить, что соблюсти условие шарнирного опирания оболочки в эксперименте затруднено. Поэтому обычно экспериментируют с защемленными по краю образцами. Так как защемление края по-видимому, должно вести к увеличению критического давления, то приведение результатов опыта к случаю шарнирного опирания должно несколько увеличить расхождение теоретических и экспериментальных данных.

Тот факт, что переход в закритическое упругое состояние оболочки при потере устойчивости происходит без увеличения нагрузки, с хлопком, свидетельствует о том, что воспринимаемая оболочкой нагрузка при выпучивании снижается. Наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка при закритической деформации называется нижней критической нагрузкой.

Для того чтобы полностью исключить возможность перехода к закритическим деформациям, внешнее дав-

Литература по этому вопросу приведена в цитированной выше книге А. С. Вольмира.

ление на поверхность оболочки должно быть меньше нижнего критического значения. Следовательно, при расчете оболочек, работающих в условиях внешнего давления, естественно ориентироваться на величину нижней критической нагрузки.

Задача по определению величины нижней критической нагрузки привлекла внимание многих авторов. Трудность решения этой задачи связана с тем, что форма поверхности при закритической деформации оболочки далека от ее первоначальной формы и не поддается простому описанию.

Обычный прием, которым пользовались многие авторы, решая эту задачу, состоит в том, что прогиб $w(x, y)$, отвечающий началу перехода к закритическим деформациям, корректируется дополнительными членами специального вида. Возникающий при этом произвол из-за неопределенности коэффициентов у этих членов устраняется энергетическими соображениями. Определение формы деформированной оболочки, а следовательно, и энергии упругой деформации, позволяет найти воспринимаемую оболочкой нагрузку.

Наше решение вопроса о величине нижней критической нагрузки также содержит как основную часть определение формы поверхности оболочки при закритической деформации. Но это определение основано на других, и прежде всего геометрических соображениях.

Мы полагаем, что переход к закритическим деформациям сопровождается в основном геометрическим изгибанием срединной поверхности. Поэтому начнем с исследования таких изгибаний.

§ 3. О ФОРМЕ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Хотя при переходе к закритическим деформациям форма срединной поверхности цилиндрической оболочки претерпевает значительные изменения, ее внутренняя метрика изменяется мало, так как внутренние деформации в материале оболочки, как упругие деформации, малы. Поэтому естественно приближать форму оболочки при закритической деформации поверхностью, изометричной цилиндру, исключая произвол такого приближения энергетическими соображениями. В связи с этим

в настоящем параграфе мы рассмотрим специальное изометрическое преобразование цилиндрической поверхности.

1. Построение поверхности, изометричной цилиндру

В работе автора *, посвященной исследованию цилиндрических оболочек, находящихся в условиях осевого сжатия, была введена изометричная цилиндру поверхность Z , с помощью которой приближалась форма сжатой цилиндрической оболочки при закритических деформациях. В этой работе показано, что желание приблизить форму оболочки при закритической деформации поверхностью изометричной исходной, естественным образом приводит к необходимости в качестве такой поверхности взять поверхность Z . Изложенные там соображения в равной степени относятся к случаю оболочки, находящейся под поперечной нагрузкой. Поэтому мы их здесь повторять не будем и ограничимся только описанием поверхности Z .

Возьмем прямую призму с правильным $2n$ -угольником в основании и проведем на какой-нибудь ее боковой грани α кривую γ , соединяющую середины оснований этой грани и однозначно проектирующуюся на ось призмы. Кривую γ отразим зеркально в радиальной плоскости, проходящей через ось призмы и боковую сторону грани α . При этом в грани α' , смежной α , получится кривая γ' . С помощью кривой γ' в грани α'' , смежной α' , строим кривую γ'' и т. д. Так, в каждой грани α^i будет построена кривая γ^i .

Проведем плоскость σ перпендикулярно оси призмы. Она пересечет кривые γ^i в точках A^i . Пусть P_σ — многоугольник в плоскости σ с вершинами A^i . При параллельном смещении плоскости σ от верхнего основания призмы к нижнему основанию многоугольник P_σ описывает поверхность Z (рис. 4). Свойства поверхности Z подробно описаны в цитированной выше работе автора. Напомним некоторые из них, используемые в дальнейшем изложении.

А. В. Погорелов. Цилиндрические оболочки при закритических деформациях. I. Осевое сжатие. Изд-во Харьковского ун-та 1961.

Прежде всего, как уже указано, поверхность Z изометрична круговому цилиндру. При изометрии, о которой идет речь, сечениям, перпендикулярным оси цилиндра (окружностям), соответствуют сечения, перпендикулярные оси призмы (многоугольники P_i). Отсюда следует, что каждый многоугольник P_i имеет один и тот же периметр, равный $2\pi R$, где R — радиус цилиндра. Поверхность Z имеет n плоскостей симметрии — плоскости, проходящие через ось призмы и ее боковые ребра.

Если кривая γ с помощью которой построена поверхность Z , гладкая, а мы это будем предполагать, то поверхность Z всюду гладкая, кроме $2n$ ребер — кривых γ^i , которые разбивают ее на $2n$ областей Z_i .

Каждая из поверхностей Z_i цилиндрическая, ее образующие перпендикулярны той радиальной плоскости призмы, относительно которой зеркально-симметричны ограничивающие поверхность кривые γ^i .

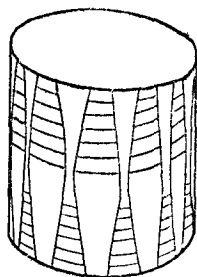


Рис. 4.

Если поверхности Z_i и Z_{i+1} примыкают к кривой γ^i , то продолжение одной из этих поверхностей за кривую γ^i цилиндрической поверхностью есть просто дополнение ее зеркальным изображением другой поверхности относительно плоскости кривой γ^i .

Построенная нами изометричная цилиндру поверхность Z зависит от целочисленного параметра $2n$ — числа граней призмы и произвольной функции одного переменного, задающей кривую γ на грани α . Приближая форму оболочки при закритической деформации поверхностью Z , мы возьмем n в соответствии с характером волнообразования на поверхности оболочки в момент потери устойчивости, а кривую γ мы будем определять из энергетических соображений.

2. О кривизне поверхности Z

Переходя к аналитическому описанию поверхности Z , введем на грани α призмы прямоугольные декартовы координаты x, y , приняв за начало координат центр грани, а за ось x прямую параллельную оси призмы. При таком выборе системы координат кривая γ однозначно

проектируется на ось x , а следовательно, может быть задана уравнением

$$y = y(x).$$

Проведем через ось призмы и боковое ребро грани α плоскость β и ее пересечение с поверхностью Z обозначим $\tilde{\gamma}$. Кривая $\tilde{\gamma}$ является нормальным сечением поверхности Z и поэтому представляет собой ортогональную проекцию кривой γ на плоскость β . Введем в плоскости β также прямоугольную декартову систему координат, приняв за оси x и y проекции осей координат, введенные в плоскости α . В этих координатах кривая $\tilde{\gamma}$ задается уравнением

$$y = \tilde{y}(x) = \sin \frac{\pi}{2n} y(x).$$

Будем предполагать n достаточно большим, так что можно считать

$$\tilde{y}(x) \approx \frac{\pi}{2n} y(x).$$

Определим кривизну ребра γ поверхности Z . Принимая во внимание уравнение кривой γ , с помощью известной формулы для кривизны кривой в декартовых координатах получим

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Обратимся теперь к нормальной кривизне поверхности Z . Нормальное сечение поверхности Z , перпендикулярное образующим, ($\tilde{\gamma}$) задается уравнением $y = \tilde{y}(x)$. Поэтому в указанном направлении нормальная кривизна поверхности Z

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{y}''}{(1 + \tilde{y}'^2)^{3/2}}.$$

Так как n , по предположению, велико, то $\tilde{y}'^2 = \pi^2 y'^2 / 4n^2$

в знаменателе этой формулы может быть опущено. И мы получаем

$$\tilde{k} = \tilde{y}'',$$

или, вводя $y(x)$ вместо $\tilde{y}(x)$,

$$\tilde{k} = \frac{\pi}{2n} y'';$$

Кривая γ является ребром поверхности Z . Найдем угол 2ϑ при этом ребре. Пусть Z' и Z'' — правая и левая полуокрестности кривой γ на поверхности Z . Каждая из них является цилиндрической поверхностью. Как указано в п. 1, продолжая поверхность Z' цилиндрической поверхностью за край γ , мы получаем поверхность Z'^* , которая при зеркальном отражении в плоскости кривой γ совмещается с поверхностью Z'' . Отсюда следует, что касательные плоскости поверхностей Z' и Z'' вдоль γ образуют с плоскостью α кривой γ углы, равные ϑ . Нетрудно найти, чему равно ϑ .

Дополним систему координат xy в плоскости β до пространственной системы координат xyz . В этой системе координат угловые коэффициенты плоскости кривой γ , то есть плоскости α , будут $0, 1, -\pi/2n$, угловые коэффициенты касательной плоскости к поверхности Z' (она перпендикулярна плоскости β) соответственно $\frac{-\pi y'}{2n}$, $1, 0$. Отсюда для угла ϑ между указанными плоскостями при большом n получается выражение

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + y'^2}.$$

3. Определение объема, ограниченного поверхностью Z

Поверхностью Z , построенной в п. 1, мы будем приближать форму оболочки при закритической деформации. Работа, производимая внешним давлением на оболочку, измеряется произведением изменения ограничиваемого ею объема при деформации на величину давления. В связи с этим мы найдем объем, который ограничивает поверхность Z вместе с основаниями призмы, которые ее закрывают.

Пересечение поверхности Z с плоскостью σ , перпен-

дикулярной ее оси, есть $2n$ -угольник P_0 . Если его площадь обозначить S , то интересующий нас объем

$$V = \int_{-L/2}^{L/2} S dx,$$

Таким образом, для того чтобы найти объем V в зависимости от функции $y(x)$, задающей форму поверхности Z , нам надо прежде всего найти выражение S в зависимости от y .

Обозначим P_0 $2n$ -угольник с вершинами в серединах сторон многоугольника, лежащего в основании призмы. Тогда, независимо от положения плоскости σ , у каждого $2n$ -угольника P_0 стороны параллельны сторонам P_0 .

Плоскость σ пересекает призму по правильному $2n$ -угольнику \bar{P} . Занумеруем вершины этого многоугольника в порядке их следования и обозначим P' правильный n -угольник с четными вершинами \bar{P} , а P'' — правильный n -угольник с нечетными вершинами \bar{P} . Многоугольник P_0 вписан в \bar{P} , а его стороны образуют равные углы со сторонами \bar{P} . Отсюда следует, что многоугольник P_0 получается линейным смешиванием многоугольников P' и P'' по Минковскому*.

Именно,

$$P_0 = \frac{a}{2} - y \cdot P' + \frac{a}{2} + y \cdot P'',$$

где a — сторона многоугольника \bar{P} .

По известной формуле площадь многоугольника

$$P = \lambda P' + \mu P'' \quad (\lambda + \mu = 1)$$

равна

$$S = \lambda^2 S' + 2\lambda\mu S_0 + \mu^2 S'',$$

где S' и S'' — площади многоугольников P' и P'' , а S_0 — площадь многоугольника P , который получается

* Линейной комбинацией фигур F' и F'' , лежащих в одной плоскости или параллельных плоскостях, называется фигура

$$F = \lambda F' + \mu F'',$$

которую описывает конец вектора $r = \lambda r' + \mu r''$ когда концы векторов r' и r'' независимо описывают фигуры F' и F'' , См. А. Д. Александров. Выпуклые многоугольники. Гостехиздат, 1950.

в линейной комбинации P' и P'' при $\lambda = \mu = 1/2$. В нашем случае S_0 представляет собой площадь $2n$ -угольника P_0 .

Принимая во внимание, что $\lambda + \mu = 1$ и $S' = S''$, формулу для S можно преобразовать. Именно:

$$S = S' + 2\lambda\mu(S_0 - S').$$

Подставляя сюда

$$\lambda = \left(\frac{a}{2} - y\right) / a, \quad \mu = \left(\frac{a}{2} + y\right) / a,$$

получим

$$S = (*) - \frac{2y^2}{a^2}(S_0 - S'),$$

где (*) — слагаемое не зависящее от y .

Вводя теперь в формулу для объема V найденное выражение S , получим

$$V = (*) - \frac{2}{a^2}(S_0 - S') \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dx.$$

4. Приближение формы поверхности оболочки при закритической деформации поверхностью Z

Приближая форму оболочки при закритической деформации поверхностью Z , мы должны прежде всего обеспечить условие изометрии оболочке заданных конкретных размеров. Так как сечениям цилиндрической оболочки плоскостями, перпендикулярными ее оси, по изометрии соответствуют многоугольники P_0 , то периметр у каждого такого многоугольника один и тот же, равный охвату оболочки $2\pi R$, где R — радиус оболочки. Что касается высоты поверхности Z — расстояния между ее торцами, то она может быть принята равной высоте оболочки, которую мы обозначим Z .

Далее мы должны воспроизвести характер периодичности формы оболочки при закритической деформации на поверхности Z . Для этого параметр n , определяющий периодичность Z , мы находим из условия

$$\sqrt{\frac{R\delta}{L^2}} = 7,5 \left(\frac{R}{L_n}\right)^2.$$

Именно из этого условия в § 2 было определено n , характеризующее периодичность прогиба w по окружности оболочки в момент потери устойчивости.

Для удобства предстоящих выкладок введем вместо переменных x и y безразмерные параметры ξ и η , полагая

$$x = \frac{L}{2} \xi, \quad y = \frac{a}{2} \eta.$$

Пределы изменения переменных ξ и η : $-1, +1$. Так как при большом n $a \approx \pi R/n$, то можно считать

$$y \approx \frac{\pi R}{2n} \eta.$$

В новых переменных для кривизны ребер γ поверхности Z получается выражение

$$k = \frac{2\pi R}{nL^2} \frac{|\eta''|}{\left(1 + \frac{\pi^2 R^2}{L^2 n^2} \eta'^2\right)^{1/2}}.$$

Принимая во внимание формулу, определяющую n , мы видим, что

$$\frac{\pi^2 R^2}{L^2 n^2} = \frac{\pi^2}{7,5} \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}.$$

Поэтому для оболочек, у которых $R\delta/L^2 \ll 1$, кривизну ребер γ можно вычислять по упрощенной формуле

$$k = \frac{2\pi R}{nL^2} |\eta''|.$$

Начальная кривизна поверхности Z в направлении, перпендикулярном ее образующим,

$$\tilde{k} = \frac{\pi^2 R}{n^2 L^2} \eta''.$$

Обратимся теперь к выражению объема V , который ограничивает поверхность Z . Для этого найдем разность $S_0 - S'$, входящую в формулу для V . Величины S_0 и S' представляют собой площади правильных многоугольников с одним и тем же периметром $2\pi R$, а числом сторон $2n$ и n соответственно. Так как площадь правильного

многоугольника с периметром $2\pi R$ и числом сторон m равна

$$\left(\frac{\pi R}{m}\right)^2 \frac{m}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m}},$$

то

$$S_0 - S' = \pi^2 R^2 \left(\frac{1}{2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}} - \frac{1}{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \right).$$

Отсюда при $n \gg 1$

$$S_0 - S' \cong \frac{\pi^3 R^2}{4n^2}.$$

Подставляя выражение $S_0 - S'$ в формулу для объема V , в новых переменных ξ , η будем иметь

$$V = (*) - \frac{\pi^3 R^2 L}{16 n^2} \int_{-1}^1 \eta^2(\xi) d\xi,$$

где (*) обозначено выражение, не зависящее от выбора функции $\eta(\xi)$.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В этом параграфе мы устраним оставшийся произвол в построении поверхности Z , которой мы приближаем форму оболочки при закритической деформации. Именно, найдем вид функции $\eta(\xi)$ из условия равновесия оболочки под действием заданной поперечной нагрузки. Таким образом будет подготовлено исследование закритического упругого состояния оболочки, которое мы проведем в следующем параграфе.

1. Выражение энергии упругой деформации оболочки

Энергию U упругой деформации оболочки мы условно разбиваем на две части U_1 и U_2 . U_1 — это энергия изгиба оболочки вне малой окрестности зоны сильного местного изгиба вдоль ребер γ_k , а U_2 — энергия изгиба вдоль упомянутых ребер. Обозначим \bar{U}_1 энер-

гию \bar{U}_1 , отнесенную к единице площади оболочки, а \bar{U}_2 - энергию U_2 на единицу длины ребра.

Найдем выражение \bar{U}_1 . Будем различать два случая.

1. Оболочка изготовлена из листового материала, причем деформация, при которой листу придается цилиндрическая форма, является упругой. В этом случае ненапряженное состояние элемента оболочки является плоским.

2. Оболочка изготавливается из листового материала путем пластических деформаций или другим способом, но так что элемент оболочки до нагружения оболочки находится в ненапряженном состоянии.

Энергия упругой деформации в этих двух случаях при одной и той же форме оболочки в закритическом состоянии будет отличаться. Рассмотрим сначала первый случай.

Будем считать нормальную кривизну положительной, если нормальное сечение обращено выпуклостью наружу оболочки. При таком соглашении о знаке кривизны в рассматриваемом случае перехода элемента оболочки с ненапряженного состояния в напряженное состояние, связанное с закритической деформацией, будет сопровождаться изменением кривизны $\Delta k_1 = \pm \pi^2 R \eta'' / n^2 L^2$ по направлениям образующих исходной поверхности и $\Delta k_2 = 0$ в перпендикулярном направлении.

Поясним знаки (+) и (-) у Δk_1 . Для этого проведем через боковые ребра грани α призмы, с помощью которой строится поверхность Z , радиальные плоскости β_1 и β_2 . Они вырезают из поверхности Z область Z_β . Ребром γ эта область разбивается на две — Z' и Z'' . В точках областей Z' и Z'' , лежащих в одной плоскости σ , перпендикулярной оси призмы, нормальные кривизны одинаковы по величине, но отличаются знаком. Отсюда два знака у Δk_1 . Областям Z' и Z'' на поверхности Z соответствуют области G' и G'' , разделяемые кривой γ на грани α . Определяя взаимное расположение этих областей направлением оси y в грани α , можем сказать, что если область G'' расположена над G' , то в выражении Δk_1 надо брать (+) для области Z' и (-) для области Z'' .

Так как в рассматриваемой деформации главные направления поверхности оболочки сохраняются, то

энергия изгиба оболочки на единицу площади определяется по известной формуле

$$\bar{U}_1 = \frac{E\delta^3}{24(1-\mu^2)} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\Delta k_1 \Delta k_2),$$

где E — модуль упругости материала, μ — коэффициент поперечного сжатия, а δ — толщина оболочки. В рассматриваемом случае $\Delta k_2 = 0$. Поэтому

$$\bar{U}_1 = \frac{E\delta^3}{24(1-\mu^2)} \left(\frac{\pi^2 R}{n^2 L^2} \right)^2 \eta''^2.$$

Полная энергия получается интегрированием по площади оболочки:

$$U_1 = \frac{\pi^5 E \delta^3}{24(1-\mu^2) n^4} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \int_{-1}^1 \eta''^2 d\xi.$$

Обратимся теперь ко второму случаю. Здесь Δk_1 имеет прежнее значение, но $\Delta k_2 = 1/R$. Рассмотрим

$$\iint_Z \Delta k_1 \Delta k_2 ds,$$

где интегрирование выполняется по площади поверхности оболочки. Имеем:

$$\begin{aligned} \iint_Z \Delta k_1 \Delta k_2 ds &= 2n \iint_{Z'} \Delta k_1 \Delta k_2 ds = \\ &= \frac{\pi^2}{nL} \int_{-1}^1 \eta'' (b'' - b') d\xi, \end{aligned}$$

где b' и b'' — отрезки прямолинейных образующих поверхностей Z' и Z'' , отвечающих данному сечению (ξ). Отрезки b' и b'' выражаются через координату y их общего конца. Именно:

$$b' = \left(\frac{a}{2} + y \right) \cos \frac{\pi}{2n}, \quad b'' = \left(\frac{a}{2} - y \right) \cos \frac{\pi}{2n}.$$

Отсюда, вводя вместо y безразмерную координату η , при большом n получим

$$b'' - b' = \frac{\pi R}{n} \eta$$

$$\iint_Z \Delta k_1 \Delta k_2 ds = -\frac{\pi^3 R}{n^2 L} \int_{-1}^1 \eta'' \eta d\xi.$$

Выполняя в правой части равенства интегрирование по частям и замечая, что $\eta(-1) = \eta(1) = 0$, получим

$$\iint_Z \Delta k_1 \Delta k_2 ds = \frac{\pi^3 R}{Ln^2} \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi.$$

Следовательно, полная энергия U_1 во втором случае вычисляется по формуле

$$U_1 = \frac{\pi^5 E \delta^3}{24(1-\mu^2)n^4} \left(\frac{R}{L}\right)^3 \int_{-1}^1 \eta'^3 d\xi + \\ + \frac{\pi^3 \mu E \delta^3}{12(1-\mu^2)n^2} \left(\frac{R}{L}\right) \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi + (*),$$

где (*) обозначено слагаемое, не зависящее от η .

Вычислим теперь энергию местного изгиба оболочки вдоль ребер γ . Здесь мы не будем различать двух случаев, так как деформация оболочки вдоль ребер настолько значительна, что в сравнении с ней начальное упругое состояние можно игнорировать. Для определения энергии местного изгиба вдоль ребер γ поверхности Z мы будем пользоваться формулой

$$\bar{U}_2 = c E \delta^{5/2} \vartheta^{5/2} \rho^{-1/2}, \quad c = 0, 1, 2,$$

где $1/\rho$ — кривизна ребра, а ϑ — угол, который образует его плоскость с касательной плоскостью поверхности*. Подставляя сюда значения ρ и ϑ , полученные в § 3, будем иметь:

$$\bar{U}_2 = c E \delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{5/2} |y''|^{1/2} \sqrt{1+y'^2}.$$

Интегрируя это выражение по дуге ребра γ и умножая

Эта формула получена в работе автора «К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии» (Изд-во Харьковского ун-та, 1960). Ее применение к случаю цилиндрических оболочек дано в нитированной выше работе, посвященной сжатым цилиндрическим оболочкам.

на число ребер ($2n$), получим полную энергию местного изгиба вдоль ребер:

$$U_2 = 2cnE\delta^{5/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{5/2} \int_{-L/2}^{L/2} |y''|^{1/2} (1 + y'^2) dx$$

или, переходя к безразмерным параметрам ξ и η ,

$$U_2 = \frac{\pi^3 c}{4n^2} E\delta^{5/2} R^{1/2} \int_{-1}^1 |\eta''|^{1/2} \left(1 + \frac{\pi^2 R^2}{n^2 L^2} \eta'^2\right) d\xi.$$

Как показано в § 3, при $R\delta/L^2 \ll 1$ член η'^2 в подынтегральном выражении может быть опущен и для энергии U_2 получается упрощенное выражение

$$U_2 = \frac{\pi^3 c}{4n^2} E\delta^{5/2} R^{1/2} \int_{-1}^1 |\eta''|^{1/2} d\xi,$$

Складывая U_1 и U_2 получим полную энергию упругой деформации оболочки. Во втором случае, рассмотрением которого мы ограничимся,

$$\begin{aligned} U &= \frac{\pi^5 E\delta^3}{24(1-\mu^2)n^4} \left(\frac{R}{L}\right)^3 \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi + \\ &+ \frac{\pi^3 \mu E\delta^3}{12(1-\mu^2)n^2} \left(\frac{R}{L}\right) \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi + \\ &+ \frac{c\pi^3}{4n^2} E\delta^{5/2} R^{1/2} \int_{-1}^1 |\eta''|^{1/2} d\xi + (*). \end{aligned}$$

Введем в это выражение значение n , определяемое из условия потери устойчивости цилиндрической формы

$$\sqrt{\frac{R\delta}{L^2}} = 7,5 \left(\frac{R}{Ln}\right)^2.$$

Получим

$$\begin{aligned} U &= E\delta \left(\frac{L}{R}\right) \left\{ 0,252 \varepsilon^2 \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi + 0,115 \varepsilon \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi + \right. \\ &\left. + 0,124 \int_{-1}^1 |\eta''|^{1/2} d\xi \right\} + (*), \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}, \end{aligned}$$

где (*) не зависит от η .

Введем, наконец, значение n в выражение для объема ограниченного оболочкой. Получим

$$V = (*) - 0,258 L^3 \varepsilon \int_{-1}^1 \eta^2 d\xi.$$

2. Определение функций $\eta(\xi)$

Функцию $\eta(\xi)$, задающую форму оболочки при закрытой деформации, мы будем определять из энергетического принципа, именно из условия минимума функционала $U(\eta)$ при $qV = \text{Const}$, где q — действующая на оболочку нагрузка. Если обозначить

$$\begin{aligned} I(y) = & 0,252 \varepsilon^2 \int_{-1}^1 y''^2 dx + 0,115 \varepsilon \int_{-1}^1 y'^2 dyx + \\ & + 0,124 \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} d\xi, \\ \lambda(y) = & \int_{-1}^1 y^2 d\xi, \end{aligned}$$

то задача сводится к определению функции $y(x)$, реализующей минимум функционала $I(y)$ при условиях $\lambda(y) = \text{const}$, $y(-1) = y(1) = 0$. (Вместо переменных ξ и η в дальнейшем мы будем употреблять более привычные обозначения x и y).

В замкнутом виде, по-видимому, эта задача не решается и поэтому воспользуемся приближенным методом. Будем искать решение нашей задачи среди гладких кусочно дважды дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию

$$|y''| = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > \alpha \\ a & \text{при } |x| < \alpha. \end{cases}$$

Таким образом, график функций $y(x)$ состоит из параболы на участке $|x| < \alpha$ и прямолинейных отрезков при $|x| > \alpha$ (рис. 5).

Аналитическое выражение функции определяемое этими условиями, будет: при $|x| \leq \alpha$

$$y = \frac{ax^2}{2} - \frac{a\alpha^2}{2} - a\alpha(1 - \alpha),$$

при $x > \alpha$

$$y = a\alpha(x - 1),$$

при $x < -\alpha$

$$y = -a\alpha(x + 1).$$

Исходя из такого представления функции $y(x)$, вычислим интегралы, которые входят в выражения $I(y)$ и $\lambda(y)$. Имеем:

$$\int_{-1}^1 y''^2(x) dx = 2\lambda a^2,$$

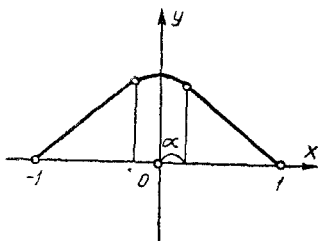


Рис. 5.

$$\int_{-1}^1 y'^2(x) dx = 2a^2 a^2 (1 + (*)),$$

$$\int_{-1}^1 |y''(x)|^{1/2} dx = 2a^{1/2} \alpha,$$

$$\int_{-1}^1 y^2(x) dx = \frac{2}{3} a^2 a^2 (1 + (*)),$$

где (*) обозначает выражения имеющие порядок α при малом α .

Мы утверждаем, что значение α , при котором достигается минимум I , мало вместе с ϵ . Действительно, если бы это было не так, то функционал I был бы ограничен снизу положительным числом по крайней мере для некоторой последовательности неограниченно убывающих ϵ . Вместе с тем, если при малом ϵ взять $\alpha = \sqrt{\epsilon}$, то соответствующее ему значение α , определяемое связью

$$\int_{-1}^1 y^2 dx = \lambda,$$

имеет порядок $1/\sqrt{\varepsilon}$, а функционал I имеет порядок $\varepsilon^{1/4}$, то есть мал вместе с ε , вопреки предположению.

Таким образом, при малом ε a также мало и, следовательно, мы можем принять для наших интегралов упрощенные выражения

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 2a^2\alpha^2, \quad \int_{-1}^1 y^2 dx = \frac{2}{3} a^2\alpha^2.$$

Подставляя теперь значения интегралов в выражение функционалов I и λ , мы приходим к следующей задаче. Определить минимум функции.

$$I = 0,5 \varepsilon^2 a^2 \alpha + 0,23 \varepsilon a^2 \alpha^2 + 0,25 a^{1/2} \alpha$$

при условии

$$\frac{2}{3} a^2 \alpha^2 = \lambda.$$

Если ввести в выражение I значение a из условия связи, то I становится функцией одного переменного α :

$$I = 0,5 \varepsilon^2 \sqrt{\frac{3\lambda}{2}} a + 0,23 \varepsilon \frac{3\lambda}{2} + 0,25 \sqrt{\frac{3\lambda}{2}} a^{1/2}.$$

Отсюда без труда находим, что минимум I достигается при

$$a = 0,4 \varepsilon^{-4/3}.$$

и величина

$$\min I = 0,73 \varepsilon^{2/3} \sqrt{\lambda} + 0,35 \varepsilon \lambda.$$

Определив значение параметра a , отвечающего минимуму I , а вместе с ним и $\alpha = \sqrt{\frac{3\lambda}{2}} a$, мы нашли таким образом функцию $y(x)$, определяющую форму деформированной оболочки в зависимости от величины деформации, которая характеризуется параметром λ .

Подставляя теперь значение $\min I$ в выражение энергии упругой деформации оболочки, мы получаем ее в зависимости от параметра деформации λ :

$$U = E\delta^3 \left(\frac{L}{R} \right) (0,73 \varepsilon^{2/3} \sqrt{\lambda} + 0,35 \varepsilon \lambda).$$

Объем, ограниченный деформированной оболочкой,

$$V = (*) - 0,258 L^3 \varepsilon \lambda.$$

Теперь, сравнивая изменение энергии упругой деформации и элементарную работу, производимую внешним давлением q , получим условие равновесия

$$0,258 L^3 \varepsilon q = E \delta^3 \frac{L}{R} \left(0,37 \varepsilon^{2/3} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 0,35 \varepsilon \right).$$

Отсюда величина давления q , соответствующая заданной деформации λ ,

$$q = E \left(\frac{\delta}{L} \right)^3 \frac{L}{R} \left(1,45 \varepsilon^{-1/3} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 0,35 \right).$$

3. Анализ условий применимости метода

Основу применяемого нами метода исследования упругого состояния оболочки при закритической деформации составляет определение энергии местного изгиба оболочки вдоль ребер. Соответствующая формула в цитированной выше работе автора была выведена при некоторых условиях, ограничивающих ее применение. Именно, требуется, чтобы кривизна ребра $1/\rho$, угол ϑ , соприкасающейся плоскости ребра с касательной плоскостью и толщина оболочки δ удовлетворяли неравенству

$$\frac{\delta}{\rho \vartheta} \ll 1.$$

Анализ этого условия, связанный с рассмотрением некоторых экспериментальных данных, проведенный в указанной работе, показывает, что это условие, по-видимому, может быть ослаблено до требования

$$\frac{\delta}{\rho \vartheta} < 0,4.$$

Выясним, в какой степени это условие выполняется в настоящем исследовании закритического упругого состояния оболочки. В § 3 для кривизны ребра получено выражение

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\pi R}{nL^2} |y''|.$$

Угол ϑ между плоскостью ребра и касательной плоскостью поверхности Z

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n}.$$

Максимальное значение $|y''|$ для функции $y(x)$ равно

$$a = 0,4 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{-2/3}.$$

Таким образом, условие применимости формулы для энергии местного изгиба вдоль ребер будет

$$\delta \frac{2\pi R}{nL^2} \frac{2n}{\pi} a = 1,6 \left(\frac{\delta R}{L^2} \right)^{1/3} < 0,4$$

или, если быть более точным,

$$\frac{\delta R}{L^2} \ll 1.$$

Для случая неограниченно упругих оболочек полученное неравенство является единственным условием безупречности применяемого метода исследования. Если же речь идет о реальных оболочках, то есть оболочках, обладающих ограниченной упругостью, то мы должны еще проверить, не приводят ли наши построения к напряжениям, выходящим за пределы упругости.

В упомянутой работе автора для максимальных напряжений в материале оболочки от местного изгиба вдоль ребер получена формула

$$\sigma = \pm c' E \left(\frac{1}{\rho} \right)^{1/2} \delta^{1/2} \vartheta^{3/2} \quad (c' \cong 1).$$

Подставляя сюда значения $1/\rho$, δ и ϑ , получим

$$\sigma = \pm E \left(\frac{2\pi R}{L^2 n} a \right)^{1/2} \delta^{1/2} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^{3/2}.$$

или, после замены a и n их значениями,

$$\sigma = \pm 0,4 E \frac{\delta}{R} \left(\frac{\delta R}{L^2} \right)^{-1/3}.$$

Таким образом, для применимости метода напряжения величиной

$$\sigma = 0,4 E \frac{\delta}{R} \left(\frac{\delta R}{L^2} \right)^{-1/3}$$

не должны приводить к заметным пластическим деформациям оболочки. Если материал обладает четко выра-

женным пределом текучести σ_e , то это условие сводится к тому, что

$$\sigma_e > 0,4 E \frac{\delta}{R} \left(\frac{\delta R}{L^2} \right)^{-1/3}.$$

Практически вместо σ_e надо брать, по-видимому, временное сопротивление σ_b .

В заключение заметим следующее. Во многих пунктах нашего рассмотрения мы предполагали малость параметра

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}.$$

Это позволило значительно упростить формулы и облегчить исследование. Однако не это было причиной для такого предположения. Малость ε — это необходимое условие применимости метода. Поэтому чтобы не усложнять исследование бесполезными выкладками, мы заранее предположили, что ε мало.

§ 5. ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ. НИЖНЯЯ КРИТИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА

Теперь мы рассмотрим вопрос о характере упругого равновесия цилиндрической оболочки при закритической деформации и в связи с этим вопрос о величине нижней критической нагрузки. При этом под нижней критической нагрузкой мы будем понимать нижнюю грань нагрузок q , отвечающих устойчивым состояниям равновесия. Значение нижней критической нагрузки состоит в том, что для оболочек, рассчитанных на величину нижней критической нагрузки, закритические деформации в условиях работы под расчетной нагрузкой исключены.

1. Случай относительно толстых оболочек

Прежде всего мы будем предполагать для рассматриваемых оболочек выполненным условие применимости нашего метода исследования

$$\frac{\delta R}{L^2} \ll 1 \quad (\S 4, \text{ п. 3.})$$

Для таких оболочек при неограниченной упругости материала поперечная нагрузка q , соответствующая закритической деформации λ , определяется по формуле

$$q = E \left(\frac{\delta}{L} \right)^3 \frac{L}{R} \left(1,45 \frac{\varepsilon^{-1/3}}{\sqrt{\lambda}} + 0,35 \right) \quad (\S 4, \text{ п. } 2).$$

Отсюда видно, что при увеличении деформации λ воспринимаемая оболочкой нагрузка q уменьшается. Это указывает на неустойчивость закритических упругих состояний в рассматриваемой области деформаций. Неустойчивость закритических упругих состояний цилиндрической оболочки под поперечной нагрузкой имеет своим следствием скачкообразный переход к закритическим деформациям без увеличения нагрузки. Оболочка хлопает.

Устойчивые состояния равновесия оболочки находятся вне рассматриваемой нами области деформаций. Поэтому для того чтобы определить нижнюю критическую нагрузку, нам надо расширить эту область. Такое расширение мы сделаем в следующем пункте. А сейчас рассмотрим случай сравнительно толстых оболочек. Так мы будем называть оболочки, удовлетворяющие условию

$$\sigma_b < 0,4 R \frac{\delta}{R} \left(\frac{\delta R}{L^2} \right)^{-1/3}.$$

Для толстых оболочек переход к закритическим деформациям связан с появлением пластических деформаций сразу после потери устойчивости. Качественное исследование, приведенное в цитированной выше работе автора*, позволяет утверждать, что в этом случае устойчивое упруго-пластическое состояние наступает при сравнительно малых деформациях, а следовательно, уравновешивающая нагрузка q , будучи стационарной в момент потери устойчивости, должна быть близка к верхней критической нагрузке.

Итак, для сравнительно толстых оболочек величина нижней критической нагрузки не может значительно отличаться от верхней критической нагрузки, определяемой по формуле

$$q_k = 0,92 E \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}.$$

* К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии.

Этот вывод согласуется с результатами экспериментального исследования цилиндрических оболочек под внешним давлением. Так, в книге А. С. Вольмира приведены результаты испытаний дюралевых оболочек с геометрическими параметрами

$$\frac{R}{\delta} = 180, \quad \frac{L}{R} = 2,2.$$

Для этих оболочек

$$1,6 \left(\frac{\delta R}{L^2} \right)^{1/3} \approx 0,02 < 0,4.$$

Образцы следует отнести к числу относительно толстых оболочек, так как

$$0,4 \frac{\delta}{R} \left(\frac{\delta R}{L^2} \right)^{-1/3} \approx 32 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, естественно ожидать, что нижняя критическая нагрузка должна быть близка к верхней. Это и было подтверждено в эксперименте.

2. Случай относительно тонких оболочек

Цилиндрическую оболочку условимся называть сравнительно тонкой, если она удовлетворяет условию

$$\sigma_b > 0,4 E \frac{\delta}{R} \left(\frac{\delta R}{L^2} \right)^{-1/3}.$$

Кроме того, как всегда, предполагается, что

$$\frac{\delta R}{L^2} \ll 1.$$

Как показано выше, для тонких оболочек переход к закритическим деформациям в рассмотренной области (§ 4) не приводит к пластическим деформациям в материале оболочки. Так как все закритические упругие состояния равновесия, рассмотренные в § 4, являются неустойчивыми, то исследование нижней критической нагрузки для тонких оболочек требует расширения области рассматриваемых закритических деформаций.

В процессе закритической деформации оболочки вершины смежных ребер оболочки сближаются (рис. ба).

В некоторый момент они подходят так близко, что их вершины начинают уплощаться (рис. 6б). До сих пор мы рассматривали закритические деформации до уплощения вершин ребер. Теперь мы рассмотрим следующий этап закритической деформации, связанный с уплощением вершин.

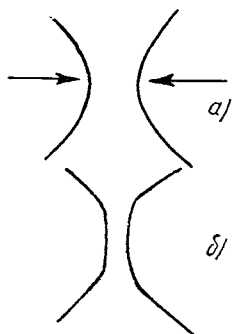


Рис. 6.

В этой стадии закритической деформации оболочки естественно искать решение вариационной задачи по определению функции $y(x)$, задающей форму поверх-

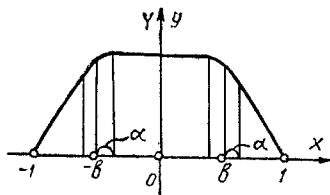


Рис. 7.

ности Z , среди функций, удовлетворяющих условиям:

$$|y''(x)| = a \quad \text{при} \quad |x \pm b| < a, \quad 0 < b < 1,$$

$$|y''(x)| = 0 \quad \text{при} \quad |x \pm b| > a.$$

График функции $y(x)$ представляет собой трапецию, у которой вершины при верхнем основании сглажены параболлами (рис. 7).

Так же, как и в § 4, легко устанавливается, что при малом

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}$$

значение параметра α , отвечающего функции $y(x)$, реализующей минимум функционала I при условии $\lambda = \text{const}$, мало. Поэтому для интегралов, которые входят в выражение I , можно принять следующие приближенные значения:

$$\int_{-1}^1 y''^2 dx = 4\alpha a^2;$$

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = \frac{2}{1-b};$$

$$\int_{-1}^1 |y''|^{1/2} dx = 4\alpha a^{1/2};$$

$$\int_{-1}^1 y^2 dx = \frac{4}{3}b + \frac{2}{3}.$$

Отметим, что значения параметров a и α не произвольны. Они связаны простой зависимостью, которая получается из условия сопряжения параболами прямолинейных участков графика $y(x)$. Именно,

$$2\alpha a = \frac{1}{1-b}.$$

Подставляя значения интегралов в выражение $I(y)$ и исключая параметр α с помощью указанной зависимости между a и α , получим

$$I = \frac{1}{1-b} (0,5 \varepsilon^2 a + 0,23 \varepsilon + 0,25 a^{1/2}).$$

Нетрудно видеть, что минимум I достигается при

$$a = 0,4 \varepsilon^{-4/3}$$

и величина

$$\min I = \frac{1}{1-b} (2,5 \varepsilon^{2/3} + 0,23 \varepsilon).$$

Так как ε по предположению мало, то можно пренебречь вторым членом ($0,23 \varepsilon$) и для $\min I$ принять упрощенное выражение

$$\min I = \frac{2,5}{1-b} \varepsilon^{2/3}.$$

Подставляя это значение I в выражение энергии упругой деформации, получим ее значение в зависимости от параметра b , характеризующего величину деформации:

$$U = \frac{2,5 E}{1-b} \delta^3 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2}$$

Теперь, сравнивая изменение энергии упругой деформации и элементарную работу, производимую внешним давлением, получаем условие равновесия

$$0,258 L^3 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2} \frac{4}{3} q = \frac{2,5 E \delta^3}{(1-b)^2} \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/3}.$$

Отсюда величина давления q , соответствующая заданной деформации b ,

$$q = 7,5 E \left(\frac{\delta}{L} \right)^3 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{-1/6} \frac{1}{(1-b)^2}.$$

Из этой формулы видно, что на втором этапе закритической деформации после достаточного сближения вершин смежных ребер состояния равновесия оболочки устойчивы, так как нагрузка растет вместе с деформацией b .

Физически полученный результат надо понимать так, что устойчивое состояние равновесия оболочки наступает при достаточном сближении ребер, и хлопок, которым сопровождается потеря устойчивости оболочки, завершается такой деформацией.

Существенно заметить, что на рассматриваемом этапе закритической деформации оболочки максимальная кривизна ребер имеет то же значение, что и на первом этапе, так как параметр a , ее определяющий, имеет ту же величину:

$$a = 0,4 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{-2/3}.$$

Отсюда следует, что и на втором этапе деформация остается упругой.

Так как минимальная нагрузка q , воспринимаемая оболочкой, получается при переходе от первого этапа закритической деформации ко второму, то для ее определения достаточно найти наименьшее значение q , получаемое в конце первого этапа.

В § 4, п. 2 было получено выражение воспринимаемой оболочкой нагрузки q при закритической деформации на первом этапе:

$$q = E \left(\frac{\delta}{L} \right)^3 \frac{L}{R} \left(1,45 \varepsilon^{-1/3} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 0,35 \right).$$

Наименьшее значение q соответствует максимальному λ (т. е. максимальной деформации). Оценим $\max \lambda$ при малом ε .

Так как $|y(x)|$ по смыслу не больше единицы и $\max |y(x)|$ достигается при $x=0$, то

$$\left| -\frac{\alpha x^2}{2} - \alpha\alpha(1-\alpha) \right| \leq 1. \quad (*)$$

Величина

$$\lambda \cong \frac{2}{3} a^2 \alpha^2.$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (*) при малом ε (следовательно малом α), получаем

$$\max \lambda \cong \frac{2}{3}.$$

Подставляя $\max \lambda$ в выражение для q , получим наименьшую нагрузку q_i , воспринимаемую оболочкой при критической деформации:

$$q_i = E \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{L}{K} \left(1,78 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{-1/6} + 0,35 \right).$$

Это и есть нижняя критическая нагрузка для сравнительно тонких оболочек.

Для того, чтобы эта формула лучше обозревалась, мы сравним полученное значение q_i с величиной верхней критической нагрузки:

$$q_e = 0,91 E \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}. \quad (§ 2)$$

Имеем:

$$q_i = 0,91 \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}} \frac{\left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2} 1,78 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{-1/6} + 0,35}{0,91},$$

откуда

$$q_i = q_e \left(1,95 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/3} + 0,385 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2} \right).$$

Исследование нижней критической нагрузки для сравнительно тонких цилиндрических оболочек мы можем резюмировать следующим выводом.

Нижняя критическая нагрузка для цилиндрической оболочки, шарнирно опертой по краям с геометрическими и механическими характеристиками, удовлетворяющими условиям

$$\frac{R\delta}{L^2} \ll 1,$$

$$q_s > 0,4 E \frac{\delta}{R} \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{-1/2},$$

равна

$$q_i = q_e \left(1,95 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/3} + 0,385 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2} \right),$$

где q_e — верхняя критическая нагрузка, определяемая по формуле

$$q_e = 0,91 E \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}.$$

Для практического пользования формулой q_i важно конкретизировать первое условие: $R\delta/L^2 \ll 1$. У нас есть такая возможность. Дело в том, что указанное условие в его первоначальном виде было

$$1,6 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/3} \ll 1 \quad (\S 4).$$

Оно появилось при вычислении энергии упругой деформации вдоль ребер оболочки при закритической деформации и представляет собой эквивалентную запись условия

$$\frac{\delta}{\rho\delta} \ll 1 \quad (\S 4).$$

Как указано в § 4, п. 3, это условие можно ослабить до требования

$$\frac{\delta}{\rho\delta} < 0,4.$$

Поэтому условию применимости нашей формулы для q_i можно придать более конкретную форму. Именно:

$$1,6 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/3} < 0,4$$

или

$$\frac{R\delta}{L^2} < 0,016$$

Итак, условие

$$\frac{R\delta}{L^2} \ll 1,$$

ограничивающее применимость формулы для q , практически сводится к тому, чтобы

$$\frac{R\delta}{L^2} < 0,016.$$

§ 6. ЗАКРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВОЙ И ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

В настоящем параграфе мы исследуем закритическое упругое состояние цилиндрической оболочки под действием внешнего давления и осевого сжатия, в частности, вопрос о величине нижней критической нагрузки. Как и в предыдущем рассмотрении, мы будем предполагать, что характер закритической деформации определяется формой волнообразования в момент потери устойчивости. И в связи с этим начнем исследование с изучения этой формы.

1. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки под действием осевого сжатия и внешнего давления

Пусть R — радиус оболочки, L — ее длина, а δ — толщина. Обозначим p и q — осевое сжатие и внешнее давление соответственно.

Введем на поверхности оболочки криволинейные координаты x , y , приняв за линии x прямолинейные образующие, а за линии y — сечения, перпендикулярные оси оболочки. За координаты x и y примем дуги вдоль соответствующих координатных линий, начало отсчета поместим на краю оболочки.

Прогиб $w(x, y)$ в момент потери устойчивости оболочки в случае осевой и поперечной нагрузки удовлетво-

рывает дифференциальному уравнению в частных производных*:

$$\frac{D}{\delta} \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p \Delta \Delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{qR}{\delta} \Delta \Delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$$

где

$$D = \frac{R\delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

— жесткость оболочки на изгиб, E — модуль упругости материала, а Δ — оператор Лапласа. Задача по определению форм волнообразования в момент потери устойчивости оболочки сводится к определению ненулевых решений этого уравнения при краевых условиях, соответствующих способу закрепления оболочки вдоль края. Мы будем рассматривать случай шарнирного опирания оболочки, так что соответствующее краевое условие будет

$$w(0, y) = 0, \quad w(L, y) = 0.$$

Рассуждая, как и в § 2, заключаем, что уравнение для w имеет нетривиальное решение, если найдутся целые m и n , удовлетворяющие условию

$$\begin{aligned} \frac{D}{\delta} \left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{E}{R^2} \left(\frac{\pi m}{L} \right)^4 - p \left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \frac{\pi^2 m^2}{L^2} - \\ - \frac{qR}{\delta} \left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right) \frac{n^2}{R^2} = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

При этом в качестве решения $w(x, y)$ можно взять функцию

$$w = c \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}.$$

Для исследования уравнения (*) удобно, как и в § 2, ввести параметры

$$\xi = \frac{\pi m R}{L n}, \quad \eta = \frac{\pi^2 \delta}{R}.$$

Если в соотношении (*) ввести вместо m и n новые переменные ξ и η , то получим

$$\frac{\eta(1+\xi^2)^2}{12(1-\mu^2)} + \frac{\xi^4}{\eta(1+\xi^2)^2} - \bar{p}\xi^2 - \bar{q} = 0,$$

* См. А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки.

где \bar{p} и \bar{q} — безразмерные параметры, характеризующие нагрузку;

$$\bar{q} = \frac{qR^2}{E\delta^2}, \quad \bar{p} = \frac{pR}{E\delta}.$$

Найдем наименьшую поперечную нагрузку q , при которой наступает потеря устойчивости оболочки при заданном значении p осевого сжатия. Для этого надо определить минимум функции

$$\bar{q} = \frac{\eta(1 + \xi^2)^2}{12(1 - \mu^2)} + \frac{\xi^4}{\eta(1 + \xi^2)} - \bar{p}^2$$

на множестве значений ξ , η , определяемых целочисленными значениями m и n .

Введем вместо параметра η новый параметр ζ , связанный с ξ и η соотношением

$$\zeta = \eta\xi^2 = m^2\zeta_0,$$

где

$$\zeta_0 = \frac{\pi^2 R \delta}{L^2}.$$

В зависимости от ξ и ζ \bar{q} выражается по формуле

$$\bar{q} = \frac{\zeta(1 + \xi^2)^2}{12(1 - \mu^2)\xi^2} + \frac{\xi^6}{\zeta(1 + \xi^2)^2} - \bar{p}^2.$$

Заметим, что параметр ζ ограничен снизу величиной ζ_0 , а параметр ξ практически может принимать любые значения.

Обозначим $\bar{q}(\xi)$ наименьшее значение \bar{q} по ζ при фиксированном ξ . Наименьшее значение \bar{q} по обоим переменным ξ и ζ , очевидно, равно $\min \bar{q}(\xi)$.

Для удобства исследования $\bar{q}(\xi)$ разобьем область значений переменного ξ на два подмножества, определяемых условиями:

$$\frac{\zeta_0}{\sqrt{12(1 - \mu^2)}} \leq \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2}, \quad (A)$$

$$\frac{\zeta_0}{\sqrt{12(1 - \mu^2)}} \geq \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2}, \quad (B)$$

В случае A

$$\bar{q}(\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} - \bar{\rho} \right) \xi^2$$

и получается при значении ζ , определяемом условием

$$\frac{\zeta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} - \frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^2} = 0.$$

В случае B

$$\bar{q}(\xi) = \frac{\zeta_0 (1+\xi^2)^2}{12(1-\mu^2)\xi^2} + \frac{\xi^6}{\zeta_0 (1+\xi^2)^2} - \bar{\rho}\xi^2,$$

что соответствует $\zeta = \zeta_0$.

На множестве A при малом ζ_0 (а мы это будем предполагать)

$$\min_A \bar{q}(\xi) \approx \frac{\sqrt{\zeta_0}}{(12(1-\mu^2))^{1/4}} \left(\frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} - \bar{\rho} \right).$$

Этот минимум достигается при наименьшем значении ξ , удовлетворяющем условию A .

Найдем значение $\min \bar{q}(\xi)$ на множестве B . Для этого прежде всего заметим, что ξ на B мало и поэтому для $\bar{q}(\xi)$ на B можно принять упрощенное выражение

$$\bar{q}(\xi) = \frac{\zeta_0}{12(1-\mu^2)\xi^2} + \frac{\xi^6}{\zeta_0} - \bar{\rho}\xi^2.$$

Приравняв нулю производную $\bar{q}(\xi)$ по ξ , находим значение ξ , для которого достигается минимум $\bar{q}(\xi)$:

$$\frac{6\xi^8}{\zeta_0} - \frac{2\zeta_0}{12(1-\mu^2)} - 2\bar{\rho}\xi^4 = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание малость ζ_0 , получаем

$$\xi^4 \approx \frac{1+\bar{\rho}}{6} \zeta_0.$$

Следовательно,

$$\min_{(B)} \bar{q}(\xi) \approx (0,86 - 1,28 \bar{\rho}) \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}.$$

Сравнивая значения $\min \bar{q}(\xi)$ на множествах A и B , замечаем, что при малом \bar{p}

$$\min_{(B)} \bar{q}(\xi) < \min_{(A)} \bar{q}(\xi).$$

Следовательно, наименьшее значение $\bar{q}(\xi)$ по всем значениям ξ равно

$$\bar{q}_e = (0,86 - 1,28 \bar{p}) \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}.$$

Величина \bar{q}_e есть верхняя критическая нагрузка для цилиндрической оболочки под внешним давлением при заданном осевом сжатии \bar{p} .

Определим параметры m и n , соответствующие верхней критической нагрузке \bar{q}_e . Так как $\min q$ получается при $\xi = \xi_0$ и ξ из множества B , то $m=1$, а n определяется из условия

$$\xi^4 = \frac{1 + \bar{p}}{6} \zeta_0,$$

то есть

$$(1 + \bar{p}) \frac{R\delta}{L^2} = 6\pi^2 \left(\frac{R}{Ln} \right)^4.$$

Полученные формулы при $\bar{p}=0$, то есть при отсутствии осевого сжатия, переходят в соответствующие формулы для оболочек, находящихся под действием только внешнего давления (§ 2) *. Поэтому верхнюю критическую нагрузку внешнего давления q_e при наличии осевого сжатия \bar{p} можно представить в следующей удобной для сравнения форме:

$$\bar{q}_e = \bar{q}_e^0 \left(1 - \frac{3}{2} \bar{p} \right),$$

где \bar{q}_e^0 — критическое давление при отсутствии осевого сжатия.

В заключение найдем верхнюю критическую нагрузку \bar{q}_e в случае всестороннего сжатия цилиндрической оболочки. Для этого положим в формуле для \bar{q}_e $\bar{p} = \bar{q}_e/2$. Тогда получим

$$\bar{q}_e = (0,86 - 0,64 \bar{q}_e) \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}.$$

* Небольшое различие в числовых коэффициентах объясняется невысокой точностью вычислений.

Отсюда

$$\bar{q}_e = \frac{0,86 \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}}{1 + 0,64 \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}}.$$

Между прочим заметим, что в виду малости параметра $\frac{R\delta}{L^2}$

$$\bar{q}_e \approx 0,86 \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}},$$

то есть верхняя критическая нагрузка при всестороннем сжатии близка к критической нагрузке в случае только поперечного нагружения.

2. Энергия упругого состояния оболочки. Работа, производимая внешней нагрузкой

Форму поверхности оболочки при закритической деформации под действием смешанного нагружения при сравнительно малом осевом сжатии естественно приближать поверхностью Z , описанной в § 3. В связи с этим мы сохраним обозначения этого параграфа.

Поверхность Z определяется целочисленным параметром n , определяющим общую периодичность строения оболочки при закритической деформации, и функцией $\eta(\xi)$, задающей ее ребра. Параметр n связан с периодичностью волнообразования в момент потери устойчивости оболочки, а следовательно, в рассматриваемом случае смешанного нагружения находится из условия

$$(1 + \bar{p}) \frac{R\delta}{L^2} = 6\pi^2 \left(\frac{R}{Ln} \right)^4, \quad (*)$$

полученного в предыдущем пункте. Функция $\eta(\xi)$ находится из энергетических соображений аналогично тому, как в простейшем случае одной поперечной нагрузки (§ 4).

Для энергии упругой деформации оболочки в закри-

тической стадии мы получили в § 3 следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{\pi^5 E \delta^3}{24(1-\mu^2)n^4} \left(\frac{R}{L}\right)^3 \int_{-1}^1 \eta''^2 d\xi + \\
 & + \frac{\pi^3 \mu E \delta^3}{12(1-\mu^2)n^2} \left(\frac{R}{L}\right) \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi + \\
 & + \frac{c\pi^3}{4n^2} E \delta^{5/2} R^{1/2} \int_{-1}^1 |\eta''|^{1/2} d\xi + (*).
 \end{aligned}$$

Если в это выражение ввести значение n , определяемое соотношением (*), и сохранить принятое в § 4 обозначение $\varepsilon^2 = R\delta/L^2$, то получим

$$\begin{aligned}
 U = E \delta^3 \left(\frac{L}{R}\right) & \left\{ 0,24 \varepsilon^2 (1 + \bar{p}) \int_{-1}^1 \eta''^2 d\xi + \right. \\
 & + 0,112 \varepsilon \sqrt{1 + \bar{p}} \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi + \\
 & \left. + 0,121 \sqrt{1 + \bar{p}} \int_{-1}^1 |\eta''|^{1/2} d\xi \right\} + (*),
 \end{aligned}$$

где (*), как и раньше, обозначено выражение, не зависящее от η .

Обратимся теперь к выражению работы, производимой внешней нагрузкой. Мы разобьем ее на две части: A_1 и A_2 . A_1 — это работа, производимая внешним давлением q , а A_2 — работа, производимая осевым сжатием p . Работа A_1 измеряется произведением внешнего давления на изменение объема, вызванного деформацией оболочки.

Для объема, ограниченного оболочкой при закритической деформации, мы получили в § 3 следующее выражение:

$$V = (*) - \frac{\pi^3 R^2 L}{16 n^2} \int_{-1}^1 \eta^2 d\xi.$$

Вводя сюда значение параметра n , получим

$$V = (*) - 0,252 L^3 \varepsilon \sqrt{1 + \bar{p}} \int_{-1}^1 \eta^2 d\xi.$$

Отсюда производимая внешним давлением работа

$$A_1 = 0,252q L^3 \varepsilon \sqrt{1 + \bar{p}} \int_{-1}^1 \eta^2 d\xi.$$

Найдем теперь величину работы A_2 . Она измеряется произведением осевого усилия P на величину осевого сжатия ΔL . Осевое усилие

$$P = 2\pi R \delta p.$$

Определим осевое сокращение оболочки в зависимости от функции $\eta(\xi)$, характеризующей ее форму. Для этого проведем радиальное нормальное сечение поверхности Z , перпендикулярное образующим. В сечении получим кривую $\tilde{\gamma}$. Ее уравнение в исходных переменных

$$y = \tilde{y}(x) \cong \frac{\pi}{2n} y(x). \quad (\S 3, \text{ п. } 2)$$

Сокращение элемента оболочки между сечениями x и $x + \Delta x$, перпендикулярными оси оболочки, равно

$$\Delta x \sqrt{1 + \tilde{y}'^2} - \Delta x \cong \frac{1}{2} \tilde{y}'^2 \Delta x = \frac{\pi^2}{8n^2} y'^2 \Delta x.$$

Полное осевое сокращение оболочки будет

$$\Delta L = \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx.$$

или, если перейти к безразмерным переменным,

$$\xi = \frac{2x}{L}, \quad \eta = \frac{2ny}{\pi R}$$

$$\Delta L = \frac{\pi^4 R^2}{16n^4 L} \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi.$$

Теперь находим работу A_2 , производимую осевым усилием:

$$A_2 = P\Delta L = \frac{\pi^5 R^3 \delta p}{8n^3 L} \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi,$$

или, если ввести значение параметра n ,

$$A_2 = 0,65 \delta^2 L (1 + \bar{p}) p \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi.$$

Полная работа, производимая внешней нагрузкой, при осевом сжатии и внешнем давлении

$$A = A_1 + A_2 = 0,252 q L^3 \varepsilon \sqrt{1 + \bar{p}} \int_{-1}^1 \eta^2 d\xi + \\ + 0,65 \delta^2 L (1 + \bar{p}) p \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi.$$

Функцию $\eta(\xi)$, задающую форму оболочки при закритической деформации, мы будем определять из условия минимума энергии U при условии $A = \text{const}$. Если обозначить

$$I(\eta) = 0,24 \varepsilon^2 (1 + \bar{p}) \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi + 0,112 \varepsilon \sqrt{1 + \bar{p}} \int_{-1}^1 \eta^2 d\xi + \\ + 0,121 \sqrt{1 + \bar{p}} \int_{-1}^1 |\eta''|^{1/2} d\xi, \\ \lambda(\eta) = \int_{-1}^1 \eta^2 d\xi + 2,58 \sqrt{1 + \bar{p}} \varepsilon \frac{\bar{n}}{q} \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi,$$

то задача сводится к определению функции $\eta(\xi)$, реализующей минимум функционала $I(\eta)$ при условиях

$$\lambda(\eta) = \text{const}, \quad \eta(-1) = \eta(1) = 0.$$

Как и в § 4, будем искать решение нашей вариационной задачи среди гладких функций $\eta(\xi)$, удовлетворяющих условиям

$$|\eta''| = \begin{cases} a & \text{при } |\xi| < \alpha, \\ 0 & \text{при } |\xi| > \alpha. \end{cases}$$

Так же, как и в § 4, устанавливается, что при малом ε значение параметра α , соответствующее экстремальной функции η , мало, и для интегралов, входящих в I и λ , можно принять упрощенные выражения:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \dot{\eta}'^2 d\xi &= 2\alpha a^2; \\ \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi &= 2\alpha^2 a^2; \\ \int_{-1}^1 |\eta''|^{1/2} d\xi &= 2\alpha^{1/2} a; \\ \int_{-1}^1 \eta^2 d\xi &= \frac{2}{3} \alpha^2 a^2. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в I и λ , получим

$$\begin{aligned} I &= 0,48 \varepsilon^2 (1 + \bar{p}) \alpha a^2 + 0,224 \varepsilon \sqrt{1 + \bar{p}} \alpha^2 a^2 + \\ &\quad + 0,242 \sqrt{1 + \bar{p}} \alpha a^{1/2}, \\ \lambda &= \alpha^2 a^2 \left(0,66 + 5,16 \sqrt{1 + \bar{p}} \varepsilon \frac{\bar{p}}{q} \right). \end{aligned}$$

Положим для краткости

$$1 + 7,75 \sqrt{1 + \bar{p}} \varepsilon \frac{\bar{p}}{q} = c^2.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{2}{3} c^2 \alpha^2 a^2.$$

Выражая отсюда α и подставляя в I , получим

$$I = 0,578 \varepsilon^2 (1 + \bar{\rho}) \frac{a \sqrt{\lambda}}{c} + 0,336 \varepsilon \sqrt{1 + \bar{\rho}} \frac{\lambda}{c^2} + \\ + 0,296 \sqrt{1 + \bar{\rho}} \frac{V \sqrt{\lambda}}{c \sqrt{a}}.$$

Легко видеть, что $\min I$ получается при

$$a = 0,4 \varepsilon^{-4/3} (1 + \bar{\rho})^{-1/3};$$

$$\min I = 0,7 \varepsilon^{2/3} (1 + \bar{\rho})^{2/3} \frac{V \sqrt{\lambda}}{c} + 0,336 \varepsilon \sqrt{1 + \bar{\rho}} \frac{\lambda}{c^2}.$$

Если теперь подставить в выражение U найденное значение $\min I$, то мы получим энергию упругой деформации в зависимости от параметра λ , характеризующего общую деформацию оболочки.

Обратимся к условиям применимости метода. В случае неограниченно упругих оболочек единственное условие, которое должно быть соблюдено, состоит в том, чтобы вдоль ребер

$$\frac{\delta}{\rho \vartheta} \ll 1, \quad (\text{см. § 4, п. 3})$$

или более конкретно

$$\frac{\delta}{\rho \vartheta} < 0,4.$$

Так как

$$\max |\eta''| = a, \\ \vartheta = \frac{\pi}{2n}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{2\pi R}{n L^2} |\eta''|,$$

то наше условие сводится к тому, чтобы

$$\delta \frac{2\pi R 2n}{n L^2 \pi} a < 0,4.$$

Так как

$$a = 0,4 \varepsilon^{-4/3} (1 + \bar{\rho})^{-1/3} \simeq 0,4 \varepsilon^{-4/3} \quad (\bar{\rho} \ll 1),$$

то условие можно записать так:

$$4 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/3} < 1,$$

или

$$\frac{R\delta}{L^2} < 0,016.$$

В случае реальных оболочек, обладающих ограниченной упругостью, нам еще надо проверить величину напряжений от местного изгиба, которые не должны заметно выходить за предел упругости материала оболочки. Имеем

$$\sigma = E \left(\frac{1}{\rho} \right)^{1/2} \delta^{1/2} \vartheta^{3/2}.$$

Подставляя сюда значения $1/\rho$, δ и ϑ , получим

$$\sigma = E \left(\frac{2\pi Ra}{nL^2} \right)^{1/2} \delta^{1/2} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^{3/2},$$

или после замены a и n их значениями

$$\sigma = 0,4 E \frac{\delta}{R} (1 + \bar{\rho})^{1/3} \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{-1/3}.$$

Так как $\bar{\rho} \ll 1$, то можно считать, что

$$\sigma = 0,4 E \frac{\delta}{R} \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{-1/3}.$$

Таким образом, в случае смешанного нагружения оболочки при малом осевом сжатии $\bar{\rho}$ условия применимости метода по существу такие же, как и в случае одной поперечной нагрузки, без осевого сжатия.

3. Исследование состояния равновесия оболочки при закритической деформации

Подставим значение минимума функционала I в выражение потенциальной энергии U . Тогда получим ее в зависимости от параметра λ , характеризующего закритическую деформацию оболочки

$$U = E\delta^3 \frac{L}{R} \left((0,70 \varepsilon^{2/3} (1 + \bar{\rho})^{2/3} \frac{\sqrt{\lambda}}{c} + 0,336 \sqrt{1 + \bar{\rho} \frac{\lambda}{c^2}} \right).$$

Производимая внешней нагрузкой работа

$$A = 0,252 qL^3 \varepsilon \sqrt{1 + \bar{p}} \lambda.$$

Условие равновесия оболочки состоит в равенстве изменения энергии упругой деформации и элементарной работы, производимой внешней нагрузкой, то есть

$$\frac{dU}{d\lambda} = \frac{dA}{d\lambda}.$$

Подставляя сюда выражения U и A , получим

$$\begin{aligned} E\varepsilon^3 \frac{L}{R} \left(0,35 \varepsilon^{2/3} (1 + \bar{p})^{2/3} \frac{1}{c \sqrt{\lambda}} + 0,336 \varepsilon \sqrt{1 + \bar{p}} \frac{1}{c^2} \right) = \\ = 0,252 qL^3 \varepsilon \sqrt{1 + \bar{p}}. \end{aligned}$$

Отсюда величина нагрузки, воспринимаемой оболочкой при закритической деформации,

$$q = E \left(\frac{\delta}{L} \right)^3 \frac{L}{R} (1,39 \varepsilon^{-1/3} (1 + \bar{p})^{1/6} \frac{1}{c \sqrt{\lambda}} + 1,33 \frac{1}{c^2}).$$

Так как $(1 + \bar{p})^{1/6} \cong 1$, то

$$q = E \left(\frac{\delta}{L} \right)^3 \frac{L}{R} (1,39 \varepsilon^{-1/3} \frac{1}{c \sqrt{\lambda}} + 1,33 \frac{1}{c^2}).$$

Мы видим, что воспринимаемая оболочкой нагрузка при увеличении деформации λ уменьшается. Следует однако заметить, что q входит в c :

$$c^2 = 1 + 7,75 \varepsilon \frac{\bar{p}}{q},$$

но ввиду малости ε и \bar{p} , это не оказывает заметного влияния и не может изменить сделанного вывода. Убывание q при возрастании λ имеет своим следствием неустойчивость рассматриваемых закритических состояний равновесия оболочки.

Неустойчивость изученных состояний равновесия оболочки заставляет нас расширить область рассматриваемых деформаций. В связи с этим мы переходим к таким деформациям, при которых вершины смежных ребер оболочки настолько сближаются, что начинается их уплощение, как и в § 5. При этом мы уже не можем пользо-

ваться рассмотренным приближением функции $\eta(\xi)$ и переходим к другой аппроксимации. Теперь мы будем искать решение задачи о минимуме функционала I среди гладких функций $\eta(\xi)$, определяемых условиями

$$\begin{aligned} |\eta''(\xi)| &= a \quad \text{при} \quad |x \pm b| < a, \quad 0 < b < 1, \\ |\eta''(\xi)| &= 0 \quad \text{при} \quad |x \pm b| > a. \end{aligned}$$

Так же, как и в § 4, показывается, что значение a , отвечающее функции $\eta(\xi)$, минимизирующей функционал I , мало вместе с ε . Поэтому для интегралов, входящих в выражение I и λ , можно принять приближенные значения:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \eta''^2 d\xi &= 4xa^2; \\ \int_{-1}^1 \eta'^2 d\xi &= \frac{2}{1-b}; \\ \int_{-1}^1 |\eta''|^{1/2} d\xi &= 4xa^{1/2}; \\ \int_{-1}^1 \eta^2 d\xi &= \frac{4}{3}b + \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

Принимая во внимание зависимость между параметрами a и α (при малом α)

$$2a\alpha = \frac{1}{1-b},$$

получим

$$I(\eta) = \frac{1}{1-b} \left(0,48\varepsilon^2(1+\bar{p})a + 0,22\varepsilon\sqrt{1+\bar{p}} + \right. \\ \left. + 0,24\sqrt{1+\bar{p}}\frac{1}{\sqrt{a}} \right)$$

$$\lambda(\eta) = \frac{4}{3}b + \frac{2}{3} + 5,16\varepsilon\frac{\bar{p}}{q}\frac{1}{1-b}.$$

Нетрудно найти значение параметра a , при котором I достигает минимума. Если мы минимум I подставим

в выражение потенциальной энергии, то ее значение получим в виде

$$U = (*) \frac{1}{1-b}.$$

Производимая внешней нагрузкой работа

$$A = (*) q \left(\frac{4}{3} b + 5,16 \varepsilon \frac{\bar{p}}{q} \frac{1}{1-b} \right).$$

Из условия равновесия

$$\frac{dU}{db} = \frac{dA}{db}$$

находим воспринимаемую оболочкой нагрузку в виде

$$q = \frac{(*)}{(1-b)^2} + (*),$$

где (*) обозначены выражения, не зависящие от b .

Мы видим, что воспринимаемая оболочкой нагрузка q увеличивается вместе с деформацией (b). Следовательно, состояния равновесия оболочки на втором этапе закритической деформации являются устойчивыми.

Рассмотрим теперь вопрос о величине нижней критической поперечной нагрузки q при наличии осевого сжатия p . В связи с этим мы прежде всего разбиваем оболочки на три класса, подчиняя геометрические и механические параметры некоторым условиям.

Условие А:

$$\frac{R\delta}{L^2} \ll 1,$$

или более конкретно

$$\frac{R\delta}{L^2} < 0,016.$$

Условие В:

$$0,4 E \frac{\delta}{R} \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{-1/3} < \sigma_{в}.$$

Оболочки, для которых не выполняется условие А, нами не рассматриваются.

Оболочку мы будем называть сравнительно толстой, если для нее выполняется условие А, но не выполняется

условие B . Если же для оболочки выполняются оба условия A и B , то мы будем называть ее сравнительно тонкой.

В случае сравнительно толстых оболочек мы ограничимся качественным исследованием вопроса. Так как переход к закритическим деформациям связан с появлением напряжений от местного изгиба

$$\sigma \approx 0,4 E \frac{\lambda}{R} \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{-1/3},$$

то этот переход для толстых оболочек связан с появлением пластических деформаций сразу после потери устойчивости. На этом основании мы утверждаем, что устойчивое упруго-пластическое состояние равновесия наступает при сравнительно малых деформациях, а следовательно, уравнивающая нагрузка q , будучи стандартна в момент потери устойчивости, должна быть близка к верхней критической нагрузке.

Итак, для сравнительно толстых оболочек величина нижней критической поперечной нагрузки q при заданном осевом сжатии p не может значительно отличаться от верхней критической нагрузки, определяемой по формуле

$$q_e = (0,86 - 1,28 \bar{p}) E \frac{\delta^2}{K^2} \sqrt{\frac{R\delta}{L^2}}, \quad \bar{p} = \frac{pR}{E\delta}.$$

Рассмотрим теперь случай сравнительно тонких оболочек. Мы будем предполагать, что материал оболочки следует классической диаграмме состояния, так что напряжения величиной $\sigma < \sigma_b$ не вызывают пластических деформаций. В этом случае закритические состояния оболочки являются упругими, и к ним в полной мере применимы заключения о характере устойчивости состояний равновесия, приведенные выше.

Так как при закритической деформации на первом этапе воспринимаемая оболочкой нагрузка падает, а на втором растет, то в качестве нижней критической нагрузки можно принять нагрузку q в конце первого этапа. Значение параметра λ на первом этапе закритической деформации монотонно растет и его максимальное значение

$$\max \lambda \approx \frac{2}{3} c^2.$$

Поэтому наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка определяется из соотношения

$$q = E \left(\frac{\delta}{L} \right)^3 \frac{L}{R} \left(1,39 \varepsilon^{-1/3} \frac{1}{c \sqrt{\lambda}} + 1,33 \frac{1}{c^2} \right)$$

при

$$\lambda = \frac{2}{3} c^2, \quad c^2 \cong 1 + 7,75 \varepsilon \frac{\bar{p}}{q}.$$

Таким образом,

$$q = E \left(\frac{\delta}{L} \right)^3 \frac{L}{R} \frac{1,7 \varepsilon^{-1/3} + 1,33}{1 + 7,75 \varepsilon \frac{\bar{p}}{q}}$$

или

$$\bar{q} = \frac{\delta R}{L^2} \frac{1,7 \varepsilon^{-1/3} + 1,33}{1 + 7,75 \varepsilon \frac{\bar{p}}{q}}.$$

Замечая, что формула при $\bar{p} = 0$ дает величину нижней критической нагрузки при отсутствии осевого сжатия, можем записать

$$\bar{q}_i = \frac{\bar{q}_i^0}{1 + 7,75 \varepsilon \frac{\bar{p}}{q}},$$

откуда

$$\bar{q}_i = \bar{q}_i^0 - 7,75 \left(\frac{R \delta}{L^2} \right)^{1/2} \bar{p}.$$

Итак, нижнее критическое давление \bar{q} при наличии осевого сжатия для сравнительно тонких оболочек определяется по формуле

$$\bar{q}_i = \bar{q}_i^0 - 7,75 \left(\frac{R \delta}{L^2} \right)^{1/2} \bar{p},$$

где \bar{q}_i^0 — нижнее критическое давление при отсутствии осевого сжатия.

$$q_i^0 = q_e^0 \left(2 \left(\frac{R \delta}{L^2} \right)^{1/3} + 1,5 \left(\frac{R \delta}{L^2} \right)^{1/2} \right),$$

$$\bar{q}_e^0 = 0,86 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2}$$

— *верхняя критическая нагрузка при отсутствии осевого сжатия*

В заключение найдем нижнюю критическую нагрузку в случае всестороннего сжатия.

Имеем:

$$\bar{q}_i = \frac{\bar{q}_i^0}{1 + 7,75 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2} \frac{\bar{p}}{q}}$$

Так как при всестороннем сжатии $\bar{p} = \bar{q}/2$, то

$$\bar{q}_i = \frac{\bar{q}_i^0}{1 + 3,9 \left(\frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2}}$$

ДОПОЛНЕНИЕ

О ЗАКРИТИЧЕСКОМ УПРУГОМ СОСТОЯНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В работе автора, посвященной исследованию сжатых цилиндрических оболочек * в закритической стадии, при рассмотрении вопроса об энергии упругой деформации допущена неточность. Правда, эта неточность не затрагивает применяемый метод и по существу не влияет на окончательный результат.

Дело в следующем. В § 3 настоящей работы при вычислении энергии упругой деформации оболочки мы различаем два случая первоначального состояния оболочек в зависимости от технологии их получения. В первом случае оболочка изготавливается из листового материала, причем деформация, при которой листу придается цилиндрическая форма, является упругой, так что ненапряженное состояние элемента оболочки является плоским. Во втором случае оболочка изготавливается из листового материала путем пластических деформаций или другим способом, но так что исходное состояние элемента оболочки является ненапряженным.

В указанной выше работе, посвященной сжатым цилиндрическим оболочкам, некорректным рассуждением показано, что энергия упругой деформации в этих двух случаях отличается только на постоянную. На этом основании мы естественно не различали этих случаев, так как наличие постоянного слагаемого в выражении потенциальной энергии не существенно.

В действительности энергия упругой деформации в указанных двух случаях оболочек отличается не толь-

* А. В. Погорелов. Цилиндрические оболочки при закритических деформациях. I. Осевое сжатие. Изд-во ХГУ, 1961.

ко постоянным слагаемым, как мы в этом убедились в § 4 настоящей работы. В связи с этим в настоящем дополнении мы имеем в виду внести соответствующее исправление. Как указано выше, это исправление не затрагивает применяемого метода и незначительно влияет на окончательный результат. Наше исправление будет относиться только ко второму случаю оболочек. В первом случае все в порядке.

Для энергии упругой деформации было получено следующее выражение:

$$U = \frac{\pi^2 E \delta \bar{h}}{12(1 - \mu^2) \xi^3 n} \int_{-1}^1 y''^2 dx + \\ + \frac{(2\bar{h})^{1/4} \pi^3 c E \delta^{5/2} R^{1/2}}{4 \iota^2} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} \left(1 + \frac{2}{\xi^2} \bar{h} y'^2 \right) dx + (*),$$

где $y(x)$ — функция, задающая форму поверхности оболочки при закритической деформации. От функции $\eta(\xi)$ § 3 настоящей работы она отличается только способом нормировки. Если мы примем во внимание соображения, изложенные в § 4, относительно способа вычисления энергии упругой деформации в рассматриваемых двух случаях оболочек, то во втором случае вместо приведенного выражения получается следующее:

$$U = \frac{\pi^2 E \delta \bar{h}}{12(1 - \mu^2) \xi^3 n} \int_{-1}^1 (y''^2 + \xi^2 y'^2) dx + \\ + \frac{(2\bar{h})^{1/4} \pi^3 c E \delta^{5/2} R^{1/2}}{4 n^2} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} \left(1 + \frac{2\bar{h}}{\xi^2} \bar{h}'^2 \right) dx + (*).$$

Таким образом, оно отличается слагаемым

$$\frac{\pi^2 E \delta \bar{h}}{12(1 - \mu^2) \xi n} \int_{-1}^1 \dot{y}'^2 dx.$$

Естественно, что такая добавка не влияет на определение функции $y(x)$, так как она находится из условия

минимума функционала $U(y)$ при фиксированном осевом сжатии, то есть при условии вида

$$(*) \int_{-1}^1 y'^2 dx = \text{const.}$$

Указанная добавка к прежнему значению энергии упругой деформации не меняет качественных выводов проведенного исследования. Что касается величины нижней критической нагрузки при осевом сжатии, то вместо прежнего значения $p_k = 0,15 E \frac{\delta}{R}$ теперь во втором случае оболочек получается

$$p_k = 0,18 E \frac{\delta}{R}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
§ 1. <i>Постановка вопроса, метод исследования и результаты</i>	3
§ 2. <i>Потеря устойчивости цилиндрической оболочки под внешним давлением</i>	7
1. Состояние упругого равновесия, возникающее при потере устойчивости основной формы	8
2. Верхняя критическая нагрузка	10
3. Некоторые экспериментальные данные	14
§ 3. <i>О форме срединной поверхности оболочки при закритической деформации</i>	15
1. Построение поверхности, изометричной цилиндру	16
2. О кривизне поверхности Z	17
3. Определение объема, ограниченного поверхностью Z	19
4. Приближение формы поверхности оболочки при закритической деформации поверхностью Z	21
§ 4. <i>Определение состояния равновесия оболочки при закритической деформации</i>	23
1. Выражение энергии упругой деформации оболочки	23
2. Определение функции η (ξ)	28
3. Анализ условий применимости метода	31
§ 5. <i>Исследование равновесия оболочки при закритической деформации. Нижняя критическая нагрузка</i>	33
1. Случай относительно толстых оболочек	33
2. Случай относительно тонких оболочек	35
§ 6. <i>Закритическое состояние цилиндрической оболочки, находящейся под действием осевой и поперечной нагрузки</i>	41
1. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки под действием осевого сжатия и внешнего давления	41
2. Энергия упругого состояния оболочки. Работа, производимая внешней нагрузкой	46
3. Исследование состояния равновесия оболочки при закритической деформации	52
Дополнение. О закритическом упругом состоянии цилиндрической оболочки при осевом сжатии	59

Алексей Васильевич Погорелов

**ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ
ДЕФОРМАЦИЯХ**

II. Внешнее давление

Редактор *А. Н. Третьякова.*

Техн. редактор *Г. П. Александрова*

Корректор *А. Г. Песчанская*

Передано в набор 30/V 1961 г. Подписано к печати 11/I 1962 г.
БЦ 03813. Формат 84×108^{1/32}. Объем: 1 бум. л., 2 физ. печ. л.,
3,2 усл. печ. л., 2,7 уч.-изд. л. Зак. 1394. Тираж 3000. Цена 29 коп.

Типография Изд-ва' Харьковского государственного университета
имени А. М. Горького. Харьков, Университетская ул., 16.